

# Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

## I Développements limités et développements asymptotiques

### 1 Définitions et premières propriétés

- Définitions, unicité
- Lien entre dérivabilité et existence de développement limité, contre-exemple
- Exemple culturel de  $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

### 2 Calcul de développements limités

- Formule de Taylor-Young, dont on déduit des DL usuels
- Intégration de DL, exemple de  $\ln(1+x)$ ,  $\arctan x$
- Intégration des relations de comparaison
- Application :  $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \dots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k x} + o(\frac{x}{\ln^k x})$  quand  $x \rightarrow +\infty$

### 3 Utilisation des développements limités

- Calcul de limites :
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (e - (1 + \frac{1}{x}))^{\frac{1}{x}} = 1$
- **DEV 1 : Théorème Central limite**
- La loi forte des grands nombres donne un DL aléatoire :  $\sum X_k = n\mathbb{E}[X_1] + o(n)$
- Le TCL donne un DL aléatoire plus précis :  $\sum X_k = n\mathbb{E}[X_1] + \sqrt{n}\mathcal{N}(0, \sigma^2) + o(\sqrt{n})$

## II Développements asymptotiques de suites et séries

### 1 Séries numériques

- Équivalent des restes/sommes partielles des séries à termes positifs
- Application : **DEV 2 : Développement asymptotique de la série harmonique**
- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha - (-1)^n}$  converge ssi  $\alpha > \frac{1}{2}$

### 2 Suites numériques

- Formule de Stirling :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$
- $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} \implies u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$
- $\forall \alpha > 0, \forall u_0 > 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \implies u_n \sim (n(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$
- $u_{n+1} = \sin(u_n) \implies u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$
- Méthode de Newton, donne un comportement asymptotique